Zestaw IV

Zadanie 1.

Wykaż, że dla dowolnej liczby $n > 0\ i\ n \neq 1\ \log_n(n+1) \cdot \log_{n+1}(n+2) \cdot \log_{n+2}(n+3) \cdot \log_{n+3} n = 1$.

Zadanie 2.

Dany jest układ równań $\begin{cases} mx + 3y = 2 \\ 3x + my = m^2 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y oraz parametrem m. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których układ jest oznaczony, a para liczb (x,y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek x-y≤2. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt, którego boki zawarte są w osi Ox i wykresie funkcji $f(x) = -\frac{4}{3}|x| + 4$. Wyznacz równanie okręgu wpisanego w ten trójkąt. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4.

Rozwiąż równanie $(sinx - cosx)^2 = sin4x + 1$, w zbiorze $\langle -\pi, \pi \rangle$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5.

Dany jest trójkąt ABC o bokach 7, 24 i $k^3 - 7k + 25$ oraz kącie $\alpha\ między\ bokami\ 7\ i\ 24$. Wyznacz zbiór wszystkich wartości liczby k, dla których kąt α w trójkącie nie jest ostry. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6.

Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$. Wyznacz całkowite współczynniki b i c tak, aby powyższe równanie miało dwa różne rozwiązania spełniające warunki, że suma ich odwrotności była równa $\frac{2}{3}$, a suma ich kwadratów byłą równa 40.

Zadanie 7.

Wyznacz kąty wewnętrzne trójkąta wiedząc, że wysokość i środkowa poprowadzona z tego samego wierzchołka dzielą kąt wewnętrzny przy tym wierzchołku na trzy równe kąty.

Zadanie 8.

Uzasadnij, że równanie $3x^5 - 10x^3 + 20x - 5 = 0$ spełnia dokładnie jest liczba rzeczywista z przedziału $\langle 0,1 \rangle$.

Zadanie 9.

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym suma długości wszystkich krawędzi jest równa 48. Wyznacz objętość tego graniastosłupa jako funkcję $f(x)$ w zależności od długości krawędzi podstawy. Określ dziedzinę tej funkcji. Wyznacz wymiary graniastosłupa, którego objętość jest największa.

Zadanie 10.

Trzy kąty wielokąta wypukłego mają po $120°$, a reszta po $160°$. Oblicz ile boków ma ten wielokąt i oblicz sumę miar jego kątów wewnętrznych.

Zadanie 11.

Oblicz granicę ciągu określonego wzorem $a_n = \frac{1-2+3-4+5-6+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{4n^2+9}}$.

Zadanie 12.

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{m+1}{2}x^2 + mx,\ x \in \mathbb{R}$. Wyznacz w zależności od parametru m punkty, w których funkcja osiąga minimum.